

APG:

1. $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \varphi)$

$$\frac{\varphi^1 \text{ VId}}{\varphi \vee \varphi} \rightarrow \text{I}, 1$$

2. $\vdash (\varphi \vee \varphi) \rightarrow \varphi$

$$\frac{(\varphi \vee \varphi)^1 \quad \varphi^2 \quad \varphi^3 \text{ VE}, 2, 3}{\varphi} \rightarrow \text{I}, 1$$

3. $\vdash (\varphi \wedge \varphi) \rightarrow \varphi$

$$\frac{(\varphi \wedge \varphi)^1 \text{ \wedge E}, 1}{\varphi} \rightarrow \text{I}, 1$$

4. $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

$$\frac{\varphi^1 \rightarrow \text{I}, 2}{\varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{I}, 1$$

1: φ

2: φ

$$\frac{[\varphi]^m \text{ D}}{\varphi} \rightarrow \text{I}, m$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \varphi} \text{ VI}, d$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \varphi} \text{ VI}, e$$

$$\frac{[\varphi]^{m_1} \text{ D}_1 \quad [\varphi]^{m_2} \text{ D}_2}{\varphi \vee \varphi} \text{ VE}, m_1, m_2$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi}{\varphi \wedge \varphi} \wedge \text{I},$$

$$\frac{\varphi \wedge \varphi}{\varphi} \wedge \text{E}, d$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \varphi}{\varphi} \rightarrow \text{E}$$

$$[\neg \varphi]^m$$

$$\frac{\perp}{\varphi} \perp, m$$

$$5. \vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)$$

$$\frac{\frac{\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \gamma)}{1} \wedge E, \wedge}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \gamma)}{1} \wedge E, \wedge}{\psi \rightarrow \gamma}}{\frac{\frac{\varphi}{\vdash} \quad \frac{\psi \rightarrow \gamma}{\vdash}}{\varphi \rightarrow \gamma} \rightarrow I, 2} \rightarrow I, 1$$

$$6. \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))$$

$$\frac{\frac{\frac{\varphi}{\vdash} \quad \frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \gamma}{\vdash}}{\varphi \rightarrow \gamma} \rightarrow I, 3 \quad \frac{\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma)}{\vdash} \rightarrow I, 2}{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma))} \rightarrow I, 1$$

$$1: \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \gamma)$$

$$2: \varphi \rightarrow \psi$$

$$3: \varphi$$

AP 8:

$$5. \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

$$2: \varphi$$

$$3: \psi$$

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{1} \quad \frac{\varphi}{\vdash} \vee I, \vee}{\varphi \vee \psi} \rightarrow E \quad \frac{\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{1} \quad \frac{\psi}{\vdash} \vee I, \vee}{\varphi \vee \psi} \rightarrow E}{\frac{\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{1} \quad \frac{\varphi \vee \psi}{\vdash}}{\neg\varphi} \rightarrow I, 2 \quad \frac{\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{1} \quad \frac{\varphi \vee \psi}{\vdash}}{\neg\psi} \rightarrow I, 3} \neg\varphi \wedge \neg\psi \wedge I$$

2) $\{ \varphi \Rightarrow \psi \} \vdash \neg \varphi \vee \psi$

Abz. 2010

$$\begin{array}{c}
 1 \quad \varphi \Rightarrow \psi^1 \quad \varphi^3 \rightarrow E \\
 2: \neg(\neg \varphi \vee \psi) \\
 3: \varphi \\
 \hline
 \varphi \quad \neg \varphi \vee \psi \quad \vee I, e \\
 \hline
 \neg(\neg \varphi \vee \psi)^2 \rightarrow E \\
 \hline
 \perp \rightarrow I, 3 \\
 \neg \varphi \quad \neg \varphi \vee \psi \quad \vee I, d \\
 \hline
 \perp \quad \neg(\neg \varphi \vee \psi)^2 \rightarrow E \\
 \hline
 \neg \varphi \vee \psi \quad \perp, 2
 \end{array}$$

3. $\{ \neg(\varphi \wedge \psi) \} \vdash (\neg \varphi \vee \neg \psi)$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad \neg(\varphi \wedge \psi)^1 \quad \varphi^3 \quad \psi^4 \wedge I \\
 2: \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi) \\
 3: \varphi \\
 4: \psi \\
 \hline
 \neg(\varphi \wedge \psi)^1 \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow E \\
 \hline
 \perp \rightarrow I, 3 \\
 \neg \varphi \quad \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)^2 \rightarrow E \\
 \hline
 \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)^2 \quad \neg \varphi \vee \neg \psi \rightarrow E \\
 \hline
 \perp \rightarrow I, 4 \\
 \neg \varphi \vee \neg \psi \quad \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)^2 \rightarrow E \\
 \hline
 \neg \varphi \vee \neg \psi \quad \perp, 2
 \end{array}$$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$

4. $\{ \neg \varphi \vee \neg \psi \} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$

2: $\neg \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi \wedge \psi$
 3: $\neg \varphi$
 4: $\neg \psi$

$$\begin{array}{c}
 \varphi \wedge \psi^2 \quad \neg \varphi^3 \quad \varphi \rightarrow E \\
 \hline
 \neg \varphi \vee \neg \psi^1 \quad \perp \rightarrow I, 2 \\
 \hline
 \neg(\varphi \wedge \psi) \quad \perp, 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \varphi \wedge \psi^2 \quad \neg \psi^4 \quad \psi \rightarrow E \\
 \hline
 \neg \varphi \vee \neg \psi^1 \quad \perp \rightarrow I, 4 \\
 \hline
 \neg(\varphi \wedge \psi) \quad \perp, 2
 \end{array}$$

$$1) \frac{\neg(\psi \vee \psi)}{1} \vdash \psi \rightarrow \psi$$

$$\begin{array}{c} \psi^2 \neg \psi^3 \rightarrow E \\ \perp \\ \hline L, 5 \\ \hline \psi \\ \hline \psi \\ \hline \psi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \psi^4 \\ \hline \psi E, 3, 4 \end{array}$$

$$2: \psi$$

$$3: \neg \psi$$

$$4: \psi$$

$$5: \neg \psi$$

$$6) \frac{\neg \psi \wedge \neg \psi}{1} \vdash \neg(\psi \vee \psi)$$

$$\begin{array}{c} \neg \psi \wedge \neg \psi^1 \wedge E, 1 \\ \neg \psi \quad \psi^3 \rightarrow E \\ \hline \psi \vee \psi^2 \\ \hline \perp \\ \hline \neg(\psi \vee \psi) \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg \psi \wedge \neg \psi^1 \wedge E, 1 \\ \neg \psi \quad \psi^4 \rightarrow E \\ \hline \perp \\ \hline \neg(\psi \vee \psi) \end{array}$$

$$2: \psi \vee \psi$$

$$3: \neg \psi$$

$$4: \perp$$

$$7) \frac{\psi \vee (\psi \wedge \delta)}{1} \vdash (\psi \vee \psi) \wedge (\psi \vee \delta)$$

$$2: \neg(\psi \vee \psi)$$

$$3: \psi$$

$$4: \psi \wedge \delta$$

$$5: \neg(\psi \vee \delta)$$

$$6: \psi$$

$$7: \psi \wedge \delta$$

$$\begin{array}{c} \psi^3 \vee I, 1 \quad \psi \wedge \delta^4 \wedge E, 1 \\ \psi \vee \neg(\psi \vee \psi)^2 \rightarrow E \quad \psi \vee I, 5 \\ \hline \psi \vee \psi \quad \neg(\psi \vee \psi)^2 \rightarrow E \end{array} \quad \begin{array}{c} \psi^6 \vee I, 4 \quad \psi \wedge \delta^7 \wedge E \\ \psi \vee \delta \quad \neg(\psi \vee \delta)^5 \rightarrow E \quad \delta \vee I, 6 \\ \hline \psi \vee \delta \quad \neg(\psi \vee \delta)^5 \rightarrow E \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \psi \vee (\psi \wedge \delta)^1 \quad \perp \quad \perp \quad \vee E, 3, 4 \\ \hline \perp \quad \perp, 2 \\ \hline \psi \vee \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \psi \vee (\psi \wedge \delta) \quad \perp \quad \perp \quad \vee E, 6, 7 \\ \hline \perp \quad \perp, 5 \\ \hline \psi \vee \delta \end{array}$$

$$\frac{\psi \vee \psi \quad \psi \vee \delta}{(\psi \vee \psi) \wedge (\psi \vee \delta)} \wedge I$$

AP9:

1. $\models \perp \rightarrow p$

$$T(\perp \rightarrow p) = \text{CNFC}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\perp \rightarrow p)))$$

$$\bullet \text{ImplFree}(\perp \rightarrow p) = \neg \text{ImplFree}(\perp) \vee \text{ImplFree}(p) = \neg \perp \vee p$$

$$\bullet \text{NNFC}(\neg \perp \vee p) = \neg \perp \vee p, \text{ pois } \text{FNN}(\neg \perp \vee p) \text{ e pelo lema da optimizac\~ao.}$$

$$\bullet \text{CNFC}(\neg \perp \vee p) = \neg \perp \vee p, \text{ pois como } \text{FNC}(\neg \perp \vee p) \text{ e pelo lema da optimizac\~ao.}$$

$$\text{Logo } T(\perp \rightarrow p) = \neg \perp \vee p = \top \vee p$$

Pelo lema da Disjunç\~ao de Literais a fórmula $\top \vee p$ é válida.

Pela correç\~ao do algoritmo T , podemos concluir que $\perp \rightarrow p$ é válida.

2. $\models T$

$$T(T) = \text{CNFC}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(T)))$$

$$\bullet \text{ImplFree}(T) = T$$

$$\bullet \text{NNFC}(T) = \text{NNFC}(\neg \neg T) = T$$

$$\bullet \text{CNFC}(T) = T$$

Logo, T é válida.

3. $\models p \vee \neg p$

$$T(p \vee \neg p) = \text{CNFC}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(p \vee \neg p)))$$

$$\bullet \text{ImplFree}(p \vee \neg p) = p \vee \neg p$$

$$\bullet \text{NNFC}(p \vee \neg p) = \text{NNFC}(p) \vee \text{NNFC}(\neg p) = p \vee \neg p$$

$$\bullet \text{CNFC}(p \vee \neg p) = p \vee \neg p$$

$$4. \vdash \neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$$

Proposição:

$$\vdash \neg p \vee q \vdash p \rightarrow q \text{ se e só se } \vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$\psi \vdash \psi \text{ se e só se } \vdash \psi \rightarrow \psi$$

$$\begin{aligned} J(\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)) &= CNFC(NNFC(ImplFree(\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q))) \\ \circ ImplFree(\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)) &= \neg ImplFree(\neg p \vee q) \vee ImplFree(p \rightarrow q) = \\ &= \neg (ImplFree(\neg p) \vee ImplFree(q)) \vee (\neg ImplFree(p) \vee ImplFree(q)) = \\ &= \neg (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ NNFC(\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee q)) &= NNFC(\neg(\neg p \vee q)) \vee NNFC(\neg p \vee q) = \\ &= (NNFC(\neg \neg p) \wedge NNFC(\neg q)) \vee (\neg p \vee q) = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ CNFC((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)) &= Distr(CNFC(p \wedge \neg q), CNFC(\neg p \vee q)) = \\ &= Distr(p \wedge \neg q, \neg p \vee q) = Distr(p, \neg p \vee q) \wedge Distr(\neg q, \neg p \vee q) \\ &= (p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \end{aligned}$$

Pelo lema da Disjunção de Literais podemos concluir que a fórmula é válida.

Pela correção do algoritmo J podemos concluir que $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ e pela proposição podemos concluir que $\vdash \neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

AP10:

$$10. \vdash p \vee (q \wedge s) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee s)$$

$$J(\underbrace{(p \vee (q \wedge s))}_{\psi} \rightarrow \underbrace{((p \vee q) \wedge (p \vee s))}_{\varphi})$$

$$\begin{aligned} \circ ImplFree(\psi) &= \neg ImplFree(p \vee (q \wedge s)) \vee ImplFree((p \vee q) \wedge (p \vee s)) = \\ &= \neg (p \vee (q \wedge s)) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee s)) \end{aligned}$$

→ Pelo lema da otimização, pois $p \vee (q \wedge s) \in H_p$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee s) \in H_p$

Pela da otimização pois $NN((p \vee q) \wedge (p \vee s))$

$$\begin{aligned} \circ NNFC(\neg(p \vee (q \wedge s)) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee s))) &= NNFC(\neg(p \vee (q \wedge s))) \vee NNFC((p \vee q) \wedge (p \vee s)) = \\ &= (\neg NNFC(\neg p) \wedge NNFC(\neg(q \wedge s))) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee s)) = \neg p \wedge (NNFC(\neg q) \vee NNFC(\neg s)) \\ &\vee ((p \vee q) \wedge (p \vee s)) = (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ CNFC((\neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)) \vee ((p \vee q) \wedge (p \vee s))) &= Distr(CNFC(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg s)), \\ CNFC((p \vee q) \wedge (p \vee s))) &= Distr(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg s), (p \vee q) \wedge (p \vee s)) = \\ &= Distr(\neg p, (p \vee q) \wedge (p \vee s)) \wedge Distr(\neg q \vee \neg s, (p \vee q) \wedge (p \vee s)) = \end{aligned}$$

$$= \text{Distr}(\neg p, p \vee q) \wedge \text{Distr}(\neg p, p \vee s) \wedge \text{Distr}(\neg q \vee \neg s, p \vee q) \wedge \text{Distr}(\neg q \vee \neg s, p \vee s) \\ = (p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s \vee p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg s \vee p \vee s)$$

Pelo lema da disjunção de literais, a fórmula é válida.

Pela correção do algoritmo $\bar{v}$ podemos concluir que ψ é válida.

Pela proposição podemos concluir que $\models \text{pr}(q \wedge s) \models (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

Ficha 10:

1. Mostre que $\text{ImplFree}((\neg p \vee q) \wedge (p \vee s)) = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee s)$

$$\psi = \text{ImplFree}(\neg p \vee q) \wedge \text{ImplFree}(p \vee s) =$$

2. b) Prove que se $\psi \in \text{Hf}$ e $\Psi = \text{NNFC}(\psi)$ então

i) $\Psi \in \text{Hf}$

ii) $\Psi \equiv \psi$

iii) Ψ não tem duplas negações

Vamos provar por indução na estrutura de ψ

Base: $\Psi = p$ onde p é um símbolo proposicional

Neste caso $\Psi = \text{NNFC}(p) = p$

i) é verdade pois p não contém implicações

ii) é verdade pois $\Psi = p$ logo $\Psi \equiv p$

iii) " " " Ψ não tem duplas negações

• $\varphi = \perp$

Neste caso $\Psi = \text{NNFC}(\perp) = \perp$

(i), (ii), (iii) verificam-se pelas mesmas razões do caso anterior.

Passo: $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

Neste caso $\Psi = \text{NNFC}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \text{NNFC}(\varphi_1) \wedge \text{NNFC}(\varphi_2)$

Por hipótese de indução $\textcircled{1} \varphi_1 \in \text{HP}$, $\textcircled{2} \varphi_1 \equiv \Psi_1$, $\textcircled{3} \varphi_1$ não tem duplas negações
e $\textcircled{4} \varphi_2 \in \text{HP}$, $\textcircled{5} \varphi_2 \equiv \Psi_2$, $\textcircled{6} \varphi_2$ não tem duplas negações

- Por $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$, temos que $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ também pertence a HP
- Como $\varphi_1 \equiv \Psi_1$ e $\varphi_2 \equiv \Psi_2$ logo $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \Psi_1 \wedge \Psi_2$
- Por $\textcircled{3}$ e $\textcircled{6}$ podemos concluir que $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ também não tem duplas negações.

AP11:

1. $(p \vee \neg p) \wedge (p \wedge \neg p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$

φ está na FNC. φ é uma fórmula de Horn

$\varphi \equiv (p \Rightarrow p) \wedge (\neg p \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \perp) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$

$A(\varphi, \{T\}) = A((p \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow \perp), \{T, p\})$
 $= A(p \Rightarrow \perp, \{T, p\}) = A(T, \{T, p, \perp\}) = \{T, p, \perp\}$

Como $\perp \in A(\varphi, \{T\})$ podemos concluir que ~~φ é contraditório~~
 $H(\varphi) = 0$, logo φ é contraditório. Logo, φ também contraditório.

2. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$

$\stackrel{\text{Implic}}{=} \neg \neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$

$\stackrel{\text{Distr.}}{=} (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q) \rightarrow$ É fórmula de Horn porque apenas tem 2 símbolos positivos.
 $\equiv ((p \wedge q) \rightarrow p) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow q) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$

$A(\varphi, \{T\}) = \{T\}$

Como $\perp \notin A(\varphi, \{T\})$ temos que $H(\varphi) \neq 1$ e portanto φ é possível. Logo φ também é possível

Lema:

1) $L \equiv (T \rightarrow L)$

2) $\bigvee_{i=1}^n \neg L_i \equiv (\bigwedge_{i=1}^n L_i) \rightarrow \perp$

3) $(\bigvee_{i=1}^n \neg L_i) \vee L \equiv (\bigwedge_{i=1}^n L_i) \rightarrow L$

Teorema:

$H(\varphi) = 1$ se φ é possível

$H(\varphi) = 0$ se φ é contraditória

Mais, se tomarmos V tal que:

$$V(p) = 0$$

é fácil ver que $V \models \psi$

$$V(q) = 0$$

$$3. (s \vee \neg p) \wedge p \wedge (\neg p \vee q \vee \neg t) \wedge \neg s \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

$$\equiv (p \rightarrow s) \wedge (T \rightarrow p) \wedge (p \wedge t) \rightarrow q \wedge (s \rightarrow \perp) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

$$\begin{aligned} A(\psi, \{T\}) &= A((p \rightarrow s) \wedge (p \wedge t) \rightarrow q \wedge (s \rightarrow \perp), \{T, p\}) = A((p \wedge t) \rightarrow q \wedge (s \rightarrow \perp), \{T, p, s\}) \\ &= A((p \wedge t) \rightarrow q, \{T, p, s, \perp\}) \end{aligned}$$

Como $\perp \in A(\psi, \{T\})$, $H(\psi) = 0$, logo ψ é contraditória. Logo, ψ é contraditória.

AP12:

$$1. a) \perp \rightarrow p \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

ψ está na forma de Horn.

$$A(\psi, \{T\}) = A(\perp \rightarrow p, \{T\}) = \{T\}$$

Como $\perp \notin A(\psi, \{T\})$, conclui-se que $H(\psi) = 1$, logo, ψ é possível.

$$b) \perp \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

$$\perp \equiv T \rightarrow \perp \stackrel{\text{def}}{=} \psi$$

$$A(\psi, \{T\}) = A(T \rightarrow \perp, \{T\}) = \{T, \perp\}$$

$H(\psi) = 0$, logo ψ é contraditória.

$$\begin{aligned}
 d) (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi \\
 &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (p \rightarrow q) \\
 &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \rightarrow q) \\
 &\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \\
 &\equiv (p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \stackrel{\text{def}}{=} \psi
 \end{aligned}$$

ψ está na FNC, mas não é uma fórmula de Horn, logo não podemos aplicar o algoritmo.

$$\begin{aligned}
 (p \vee \neg q) \wedge q \wedge (\neg p \vee q) &\stackrel{\text{def}}{=} \psi \\
 &\equiv (q \rightarrow p) \wedge (\neg q \rightarrow q) \wedge (p \wedge q \rightarrow \perp) \stackrel{\text{def}}{=} \psi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(\psi, \{T\}) &= A(q \rightarrow p \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \perp), \{T, q\}) = A((p \wedge q) \rightarrow \perp, \{T, q, p\}) \\
 &= A(T, \{T, q, p, \perp\}) = \{T, q, p, \perp\}
 \end{aligned}$$

$\perp \in A(\psi, \{T\})$, logo $H(\psi) = \emptyset$, então ψ é contraditório

2.a) Prove que:
 $L \equiv T \rightarrow L$

$$\begin{aligned}
 L &\equiv L \vee \perp \\
 &\equiv \perp \vee L \\
 &\equiv \neg \neg \perp \vee L \\
 &\equiv T \rightarrow L
 \end{aligned}$$

$$c) \left(\bigvee_{i=1}^n \neg L_i \right) \vee L \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^n L_i \right) \rightarrow L \quad (\text{Indução})$$

Base: ^{provar} para $n=1$

$$\left(\bigvee_{i=1}^1 \neg L_i \right) \vee L = \neg L_1 \vee L = L_1 \rightarrow L = \left(\bigwedge_{i=1}^1 L_i \right) \rightarrow L$$

$$\text{Hipótese: } \left(\bigvee_{i=1}^n \neg L_i \right) \vee L \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^n L_i \right) \rightarrow L$$

$$\text{Queremos mostrar que } \left(\bigvee_{i=1}^{n+1} \neg L_i \right) \vee L \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} L_i \right) \rightarrow L$$

$\xrightarrow{\text{Vivar}}$

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n+1} \neg L_i \right) \vee L \equiv \left(\bigvee_{i=1}^n \neg L_i \vee \neg L_{n+1} \right) \vee L$$

por associatividade $\leftarrow \equiv \left(\bigvee_{i=1}^n \neg L_i \vee L \right) \vee \neg L_{n+1}$

por hipótese de indução $\leftarrow \equiv \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n L_i \right) \rightarrow L \right) \vee \neg L_{n+1}$

$$\equiv \left(\neg \left(\bigwedge_{i=1}^n L_i \right) \vee L \right) \vee \neg L_{n+1}$$

por associatividade $\leftarrow \equiv \left(\neg \left(\bigwedge_{i=1}^n L_i \right) \vee \left(\neg L_{n+1} \right) \right) \vee L$

Leis de Morgan $\leftarrow \equiv \neg \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n L_i \right) \wedge \left(\neg L_{n+1} \right) \right) \vee L$

$$\equiv \neg \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} L_i \right) \vee L$$

$$\equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} L_i \right) \rightarrow L$$

AP13

Lema:

Toda a cláusula determina univocamente um conjunto de literais.
Toda a fórmula em FNC determina univocamente um conjunto de conjuntos de literais.

Proposição:

Dado $\varphi \in \text{Hp}$ com $\text{FNC}(\varphi)$:

$\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi) \iff \varphi \equiv \perp \iff \text{isto é, } \varphi \text{ é contraditória.}$

$$1. \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg(L \rightarrow p) \equiv \neg(\neg L \vee p) \\ \equiv L \wedge \neg p \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \text{ está na FNC}$$

A φ corresponde univocamente o conjunto $\{L, \neg p\}$

$$\text{Res}^0(\varphi) = \{L, \neg p\}$$

$$\text{Res}^1(\varphi) = \text{Res}^0(\varphi) = \text{Res}^*(\varphi)$$

Como $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$ podemos concluir que φ é contraditória, logo φ também é.

2. $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$ está na FNC

$$\text{Res}^0(\psi) = \{ \{ \neg p, q \}, \{ \neg p, \neg q \} \}$$

$$\text{Res}^1(\psi) = \text{Res}^0(\psi) \cup \{ \{ \neg p \} \} = \{ \{ \neg p, q \}, \{ \neg p, \neg q \}, \{ \neg p \} \}$$

$$\text{Res}^2(\psi) = \text{Res}^1(\psi) = \text{Res}^*(\psi)$$

Como $\emptyset \notin \text{Res}^*(\psi)$, concluímos que ψ é possível, logo φ também é.

3. $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \vee q) \wedge \neg p \wedge (\neg p \wedge \neg q) \stackrel{\text{def}}{=} \psi$ está na FNC

$$\text{Res}^0(\psi) = \{ \{ p, q \}, \{ \neg p \}, \{ \neg p, \neg q \}, \{ \neg q \} \}$$

$$\text{Res}^1(\psi) = \text{Res}^0(\psi) \cup \{ \{ q \}, \{ p \} \} = \{ \{ p, q \}, \{ \neg p \}, \{ \neg q \}, \{ q \}, \{ p \} \}$$

$$\text{Res}^2(\psi) = \text{Res}^1(\psi) \cup \{ \{ \} \} = \{ \{ p, q \}, \{ \neg p \}, \{ \neg q \}, \{ q \}, \{ p \}, \{ \} \}$$

$$\text{Res}^3(\psi) = \text{Res}^2(\psi) = \text{Res}^*(\psi)$$

$\emptyset \in \text{Res}^*(\psi)$, logo ψ é contraditória, então φ também é.

4. $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg(q \wedge p)) \wedge (\neg((q \wedge r) \vee \neg p)$

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge p \stackrel{\text{def}}{=} \psi$ está na FNC

O conjunto associado a ψ é: $\underbrace{\{ \neg p, q \}}_{\text{Cláusula 1}}, \underbrace{\{ r, \neg q, \neg p \}}_{C_2}, \underbrace{\{ \neg q, \neg r \}}_{C_3}, \underbrace{\{ p \}}_{C_4}$

Dedução	Justificação
$\{ \neg p, q \}$	Cláusula C_1
$\{ r, \neg q, \neg p \}$	Cláusula C_2
$\{ \neg q, \neg p \}$	Resolvente C_1 e C_2
$\{ \neg q, \neg r \}$	Cláusula C_3
$\{ \neg q, \neg p \}$	Resolvente C_3 e $\{ r, \neg p \}$
$\{ p \}$	Cláusula C_4
$\{ \neg q \}$	Resol. $\{ \neg q, \neg p \}$ e C_4
$\{ \neg p \}$	Resolvente de $\{ \neg q \}$ e C_1
$\{ \}$	Resolvente $\{ \neg p \}$ e C_4

Logo, $\emptyset \in \text{Res}^*(\psi)$, então ψ é contraditória e φ também é.

5. $\varphi \not\models (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s)$ está na FNC

$$\begin{aligned} \text{Res}^0(\varphi) &= \{ \{ \neg p, q \}, \{ \neg q, \neg r \}, \{ r, \neg s \} \} \\ \text{Res}^1(\varphi) &= \text{Res}^0(\varphi) \cup \{ \{ \neg p, \neg r \}, \{ \neg q, \neg s \} \} \\ \text{Res}^2(\varphi) &= \text{Res}^1(\varphi) \cup \{ \neg p, \neg s \} \\ \text{Res}^3(\varphi) &= \text{Res}^2(\varphi) = \text{Res}^*(\varphi) \end{aligned}$$

$\emptyset \notin \text{Res}^*(\varphi)$, então φ é possível.

AP14:

1. Suponhamos que $\varphi \models \psi$, logo $\models \varphi \rightarrow \psi$ ($\varphi \rightarrow \psi$) é válida.
Logo $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ é contraditória. Como $\varphi \wedge \neg\psi \equiv \neg(\varphi \rightarrow \psi)$,
também $\varphi \wedge \neg\psi$ é contraditória.
Pela proposição da resolução concluímos que $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi \wedge \neg\psi)$

2.a) $p \wedge q \models \neg$

$$\varphi = \neg((p \wedge q) \rightarrow \neg)$$

Considere-se a fórmula $\equiv p \wedge q \wedge \neg$
 $\equiv p \wedge q \wedge \perp \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$ está na FNC

$$\text{Res}^0(\varphi) = \{ \{ p \}, \{ q \}, \{ \perp \} \} \xrightarrow{\quad} \perp$$

$\text{Res}^*(\varphi) = \text{Res}^0(\varphi)$, logo φ é contraditória, então φ também é. Então $p \wedge q \models \neg$

b) $\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg q \models \neg p$

Suponhamos a afirmação $\varphi = \neg((\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p)$
 $\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
 $\equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg q \wedge p \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$

$\{ \neg p, q \}$	C_1	$\{ \{ \neg p, q \}, \{ \neg q \}, \{ p \} \}$ $C_1 \quad C_2 \quad C_3$
$\{ \neg q \}$	C_2	
$\{ \neg p \}$	$\text{Res } C_1 \text{ e } C_2$	
$\{ p \}$	C_3	
$\{ \perp \}$	$\text{Res. } \neg p \text{ e } C_3$	

Então, $\emptyset \in \text{Res}^*(\varphi)$. Logo φ é contraditória e φ também.
Portanto, $\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg q \models \neg p$

$$d) (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \rightarrow q) \models r$$

Suponhamos que $\psi = (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \rightarrow q) \wedge \neg r$
 $= (\neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg r$

$\vdash q, r \vdash$	C_1	
$\vdash p, q, r \vdash$	C_2	$\vdash \neg q, r \vdash, \vdash p, q, r \vdash, \vdash p, q \vdash, \vdash \neg r \vdash$
$\vdash p, r \vdash$	Res C_1 e C_2	$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4$
$\vdash \neg r \vdash$	C_4	
$\vdash p \vdash$	Res C_4 e $\vdash p, r \vdash$	
$\vdash \neg p, q \vdash$	C_3	
$\vdash \neg p, r \vdash$	Res C_1 e C_3	
$\vdash r \vdash$	Res $\vdash p, r \vdash$ e $\vdash \neg p, r \vdash$	
$\vdash \vdash$	Res C_4 e $\vdash r \vdash$	

Então $\emptyset \in \text{Res}^*(\psi)$, logo ψ é contraditória e ψ também. Então $(q \rightarrow r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \rightarrow q) \models r$

e) O princípio é verdadeiro se não se verificarem as seguintes afirmações

- a) cada pombo está num poleiro.
- b) nenhum poleiro tem mais do que um pombo.

p_{ij} : pombo i está no poleiro j $\left(\begin{matrix} 1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \right)$

$$a) \bigwedge_{i=1}^{n+1} \left(\bigvee_{j=1}^n p_{ij} \right)$$

$$b) \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^{n+1} \bigwedge_{k=i+1}^{n+1} \neg (p_{ij} \wedge p_{ik})$$

O princípio é verdadeiro se a conjunção destas fórmulas for contraditória.

$n=2$:

$$(p_{11} \vee p_{12}) \wedge (p_{21} \vee p_{22}) \wedge (p_{31} \vee p_{32}) \wedge \neg (p_{11} \wedge p_{21}) \wedge \neg (p_{11} \wedge p_{31}) \\ \wedge \neg (p_{21} \wedge p_{31}) \wedge \neg (p_{12} \wedge p_{22}) \wedge \neg (p_{12} \wedge p_{32}) \wedge \neg (p_{22} \wedge p_{32})$$

Queremos mostrar que ψ é contraditória.

$$\psi \equiv (p_{11} \vee p_{12}) \wedge (p_{21} \vee p_{22}) \wedge (p_{31} \vee p_{32}) \wedge (\neg p_{11} \vee \neg p_{21}) \wedge (\neg p_{11} \vee \neg p_{31}) \wedge (\neg p_{21} \vee \neg p_{31}) \\ \wedge (\neg p_{12} \vee \neg p_{22}) \wedge (\neg p_{12} \vee \neg p_{32}) \wedge (\neg p_{22} \vee \neg p_{32}) \quad \text{se } \psi$$

fazer $\text{Res}^0(\psi)$.

AP 15:

SP1 = {Adulto, Animal, Pessoa, Mamífero, Cadêlho, Vegetariano}

SP2 = {Filho, Antepassado, Igual, Primos, Come}

SF00 = {A, B, C, 18}

SF01 = {idade, mãe}

1. $\text{Filho}(A, C) \wedge \text{Filho}(B, C)$

2. $\exists x (\text{Filho}(x, c) \wedge \text{Adulto}(x))$

3. $\forall x (\text{Animal}(x) \rightarrow \neg \text{Pessoa}(x))$

4. $(\forall x \neg \text{Antepassado}(x, x)) \wedge ((\forall x \neg \text{Antepassado}(x, x)) \rightarrow (\text{Antepassado}(A, B) \rightarrow \neg \text{AP}(B, A)))$

5. $\forall x ((\text{Pessoa}(x) \wedge \text{Igual}(\text{idade}(x), 18)) \rightarrow \text{Adulto}(x))$

6. $\forall x, y (\text{Igual}(\text{mãe}(x), \text{mãe}(y)) \wedge \neg \text{Igual}(x, y)) \rightarrow \text{Irmãos}(x, y)$

7. $\forall x, y (\text{Igual}(\text{mãe}(\text{mãe}(x)), \text{mãe}(\text{mãe}(y))) \wedge \neg \text{Igual}(x, y) \wedge \neg \text{Irmãos}(x, y)) \rightarrow \text{Primos}(x, y)$

8. $\forall x ((\text{Pessoa}(x) \rightarrow \text{Mamífero}(x)) \wedge (\text{Mamífero}(x) \rightarrow \text{Animal}(x)))$

9. $\forall x (\exists y (\text{Filho}(y, x) \rightarrow \text{Cadêlhos}(x)))$

10. $\forall x, y (\text{Vegetariano}(x) \wedge \text{Animal}(y)) \rightarrow \neg \text{come}(x, y)$

SP1 = {QuadPerf, Par, Primo, Natural}

SP2 = {Teste}

SF0 = {A}

SF1 =

SF2 = {Soma}

11. $\forall x (\text{QuadPerf}(x) \rightarrow \text{Par}(x))$

12. $\forall x (\text{Primo}(x) \rightarrow (\text{Igual}(x, 2) \vee \neg \text{Par}(x)))$

13. $\exists x (\text{Natural}(x) \wedge \text{Par}(x))$

14. $\neg \exists x (\text{Par}(x) \wedge \text{Primo}(x))$

15. $\neg \forall x (\text{Primos}(x) \rightarrow \neg \text{Par}(x))$

$$16. \forall x (\text{Par}(\text{soma}(x, x)))$$

$$17. \forall x (\text{Par}(x) \rightarrow \exists y (\neg \text{Par}(y) \wedge \text{Igual}(x, \text{soma}(y, y))))$$

$$19. \exists x, y (\text{Teste}(x, A) \wedge \text{Teste}(y, A) \wedge \neg \text{Igual}(x, y))$$

$$20. \neg \exists x, y, z (\text{Teste}(x, A) \wedge \text{Teste}(y, A) \wedge \text{Teste}(z, A) \wedge \neg \text{Igual}(x, y) \wedge \neg \text{Igual}(x, z) \wedge \neg \text{Igual}(y, z))$$

$$21. \exists x, y (\text{Teste}(x, A) \wedge \text{Teste}(y, A) \wedge \neg \text{Igual}(x, y)) \wedge \neg \exists z ((\neg \text{Igual}(z, x) \wedge \neg \text{Igual}(z, y)) \rightarrow \text{Teste}(z, A))$$

AP 16:

$$1. a) Q(x) \wedge \underbrace{(\forall y (Q(y) \rightarrow M(z, s(x))))}_{\psi} = \varphi$$

$$\begin{aligned} VL(\varphi) &= VL(Q(x)) \cup VL(\psi) & Q \in SP_1 \\ &= \{x\} \cup VL(\psi_1) \setminus \{y\} & M \in SP_2 \\ &= \{x\} \cup (VL(Q(y)) \cup VL(M(z, s(x)))) \setminus \{y\} & S \in SF_1 \\ &= \{x\} \cup (VL(Q(y)) \cup (V(z) \cup V(s(x)))) \setminus \{y\} \\ &= \{x, z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VM(\varphi) &= VM(Q(x)) \cup VM(\psi) \\ &= \emptyset \cup (\{y\} \cup VM(\psi_1)) \\ &= \{y\} \cup VM(Q(y)) \cup VM(M(z, s(x))) \\ &= \{y\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{y\} \end{aligned}$$

$$1. c) Q(y) \wedge \underbrace{(\forall y (Q(y) \rightarrow M(z, s(y))))}_{\psi} = \varphi$$

$$\begin{aligned} VL(\varphi) &= VL(Q(y)) \cup VL(\psi) \\ &= \{y\} \cup (VL(\psi_1) \setminus \{y\}) \\ &= \{y\} \cup (VL(Q(y)) \cup VL(M(z, s(y)))) \setminus \{y\} \\ &= \{y\} \cup (\{y\} \cup (V(z) \cup V(s(y)))) \setminus \{y\} \\ &= \{y\} \cup \{z\} \\ &= \{y, z\} \end{aligned}$$

$$v_M(\varphi) = \{y\}$$

$$d) \forall x (Q(x, y) \rightarrow \exists z M(z, s(x))) = \varphi$$

$$\begin{aligned} v_L(\varphi) &= v_L((Q(x, y)) \cup v_L(\exists z M(z, s(x)))) \setminus \{x\} \\ &= \{y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_M(\varphi) &= \{x\} \cup (v_M(Q(x, y)) \cup v_M(\exists z M(z, s(x)))) \\ &= \{x\} \cup (\emptyset \cup \{z\}) \\ &= \{x, z\} \end{aligned}$$

$$2. a) \varphi = Q(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow M(z, s(x)))$$

i. $t = q(x)$; t é livre para x em φ ?

Sim. Porque $v(t) \cap v_M(\varphi) = \emptyset$

$$\varphi|_{t/x} = Q(q(x)) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow M(z, s(q(x))))$$

ii. $t = q(x)$; t é livre para y em φ ?

Sim, $y \notin v(t) \cap v_M(\varphi)$.

$$\varphi|_{t/y} = \varphi, \text{ porque } y \in v_M(\varphi)$$

$$b) \varphi = \forall x (Q(x) \rightarrow \forall z M(z, s(y)))$$

i. $t = q(z)$. t é livre para y ?

Não, $z \in v(t) \cap v_M(\varphi)$

ii. $t = q(z)$ em z .

$$\varphi|_{t/z} = \forall x (Q(x) \rightarrow \forall \overset{\downarrow}{z} M(q(z), s(y)))$$

Não, a variável é capturada.

14/17:

$$1. a) \llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^P = I(\text{zero}) = 0$$

$$b) \llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^P = p(n) = 3$$

$$c) \llbracket \text{succ}(n) \rrbracket_{\text{Nat}}^P = I(\text{succ})\left(\llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^P\right) = 3+1 = 4$$

$$d) \llbracket \oplus(\text{succ}(\text{zero}), m) \rrbracket_{\text{Nat}}^P = I(\oplus)(\text{succ}(\text{zero}), p(m)) = I(\oplus)(I(\text{succ})(\text{zero}), p(m)) \\ = 0+1+2 = 3$$

$$e) \llbracket \otimes(\oplus(m, \text{succ}(n)), \oplus(\text{succ}(\text{zero}), m)) \rrbracket_{\text{Nat}}^P = \\ = I(\otimes)(I(\oplus)(p(m), I(\text{succ})(p(n))), I(\oplus)(I(\text{succ})(\text{zero}), p(m)))) \\ = I(\otimes)((2+4), (1+2)) = I(\otimes)(6, 3) = 6 \times 3 = 18$$

2. a) $\text{Nat}, p \Vdash \text{Leq}(\text{zero}, n)$

sse

$$I(\text{Leq})(\llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^P, \llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^P) = 1$$

sse

$$\llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^P \leq \llbracket n \rrbracket_{\text{Nat}}^P$$

sse

$$0 \leq 3 \quad \checkmark$$

$\text{Logo}, \text{Nat}, p \Vdash \text{Leq}(\text{zero}, n)$

b) $\text{Nat}, p \Vdash \text{Leq}(m, \oplus(\text{succ}(\text{zero}), m))$

sse

$$I(\text{Leq})(m, \oplus(\text{succ}(\text{zero}), m))$$

sse

$$\llbracket m \rrbracket_{\text{Nat}}^P \leq I(\oplus)(\text{succ}(\text{zero}), \llbracket m \rrbracket_{\text{Nat}}^P)$$

sse

$$2 \leq (1+2) \quad \checkmark$$

$$c) \text{Nat}, p \Vdash \text{Eq}(n, m) \wedge \text{Leq}(n, \text{suc}(n))$$

sse

$$\text{Nat}, p \Vdash \text{Eq}(n, m) \text{ e } \text{Nat}, p \Vdash \text{Leq}(n, \text{suc}(n))$$

① sse

$$I(\text{Eq})([n]_{\text{Nat}}^p, [m]_{\text{Nat}}^p) = 1$$

sse

$$3 = 2 \text{ falso}$$

Logo, $\text{Nat}, p \Vdash \text{Eq}(n, m)$, e portanto, $\text{Nat}, p \nVdash \text{Eq}(n, m) \wedge \text{Leq}(n, \text{suc}(n))$

$$d) \text{Nat}, p \Vdash \text{par}(n) \rightarrow \text{impar}(n)$$

sse

$$\text{Nat}, p \nVdash p(n) \text{ ou } \text{Nat}, p \Vdash \text{impar}(n)$$

① sse

$$I(\text{par})([n]) = 0$$

sse

$$I(\text{par})(3) = 0$$

Verdade, pois não existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $3 = 2 \times k$

Logo, $\text{Nat}, p \nVdash \text{par}(n)$ e a afirmação é verdadeira.

$$e) \text{Nat}, p \Vdash \exists n \text{ impar}(\text{suc}(n))$$

sse existe $a \in \mathbb{N}_0$ tal que $\text{Nat}, p[n := a] \Vdash \text{impar}(\text{suc}(n))$

sse existe $a \in \mathbb{N}_0$ tal que $I(\text{impar})([\text{suc}(n)]_{\text{Nat}}^{p[n:=a]}) = 1$

sse existe $a \in \mathbb{N}_0$ t.q. $I(\text{impar})(p[n:=a](n) + 1) = 1$

sse " " " $I(\text{impar})(a + 1) = 1$

Verdade. Basta tomar $a = 2$

AP 18:

Ficha 17:

g) $\text{Nat}, p \Vdash \forall n \text{ Eq}(\text{suc}(n), m)$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sse} & \text{para todo} & v \in \mathbb{N}_0 & \text{Nat}, p[n:=v] \Vdash \text{Eq}(\text{suc}(n), m) \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \text{I}(\text{Eq})\left(\llbracket \text{suc}(n) \rrbracket_{\text{Nat}}^{p[n:=v]}, \llbracket m \rrbracket_{\text{Nat}}^{p[n:=v]}\right) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \left(p[n:=v](n) + 1 = p[n:=v](m) \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \left(v + 1 = 2 \right) \end{array}$$

$\rightarrow$ Falso, basta tomar $v = 2$. Logo,
 $\text{Nat}, p \not\Vdash \forall n \text{ Eq}(\text{suc}(n), m)$.

h) $\text{Nat}, p \Vdash \forall n \rightarrow \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$

$$\text{sse para todo } v \in \mathbb{N}_0 \quad \text{Nat}, p[n:=v] \Vdash \rightarrow \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$$

$$\parallel \parallel \parallel \quad \text{Nat}, p[n:=v] \not\Vdash \text{Eq}(\text{suc}(n), \text{zero})$$

$$\parallel \parallel \parallel \quad \text{I}(\text{Eq})\left(\llbracket \text{suc}(n) \rrbracket_{\text{Nat}}^{p[n:=v]}, \llbracket \text{zero} \rrbracket_{\text{Nat}}^{p[n:=v]}\right) = 0$$

$$\parallel \parallel \parallel \quad \left(p[n:=v](n) + 1 \neq 0 \right)$$

$$\parallel \parallel \parallel \quad \left(v + 1 \neq 0 \right) \rightarrow \text{Verdade. Logo, a afirmação é verdadeira.}$$

Ficha 11:

$$1: \not\models P(y) \models \forall x P(x)$$

Considere-se $M = (\mathbb{N}_0, I)$ tal que $I(p)(n) = 1$ sse n é par.

Seja $p: x \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(y) = 2$

$$\text{Logo, } M, p \Vdash p(y) \text{ pois } I(p)(\llbracket y \rrbracket_M^p) = I(p)(p(y)) = I(p)(2) = 1$$

Mas $M, p \not\models \forall x P(x)$ pois não é verdade que para qualquer $v \in \mathbb{N}_0$

$M, p[x:=v] \models P(x)$ pois $I(p)([x]_H^{p[x:=v]}) = I(p)(v)$

se $v=3$, $I(p)(3)=0$. Logo, $M \not\models \forall x P(x)$

2. $\{ \exists x P(x) \} \models \forall x P(x)$

Tomemos $M(\mathbb{N}_0, I)$, onde $I(p): \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0,1\}$, tal que $I(p)(n)=1$ sse n é par.
Tomemos $p: x \rightarrow \mathbb{N}_0$ qualquer.

$M, p \models \exists x P(x)$ pois existe $v \in \mathbb{N}_0$ tal que, $M, p[x:=v] \models P(x)$. Basta tomar $v=2$

$$I(p)([x]_H^{p[x:=v]}) = I(p)(2) = 1$$

Mas $M, p \not\models \forall x P(x)$.

pois existe $v \in \mathbb{N}_0$ tal que $M, p[x:=v] \not\models P(x)$. Basta tomar $v=3$.

$M, p[x:=3] \not\models P(x)$, pois $I(p)([x]_H^{p[x:=3]}) = I(p)(3) = 0$

3. $\{ \exists x P \} \models \forall x P$, $(P \in \mathcal{SP}_0)$

Seja $M(\mathcal{U}, I)$ uma estrutura de interpretação e $p: x \rightarrow \mathcal{U}$ uma atribuição.
Suponhamos que $M, p \models \exists x P$.

Então existe $v \in \mathcal{U}$ tal que $M, p[x:=v] \models P$,

isto é, existe " " $I(p)(v) = 1$.

Mas então, qualquer $v \in \mathcal{U}$ também se tem que $I(p)(v) = 1$.

Logo, $\{ \exists x P \} \models \forall x P$.

$$7. \{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

Seja $M(U, I)$, uma estrutura de interpretação e $p: x \rightarrow U$ uma atribuição tal que:

$M, p \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$. Logo,
 existe $u \in U$ tal que $M, p[x:=u] \models P(x) \wedge Q(x)$
 " " " $M, p[x:=u] \models P(x)$ e $M, p[x:=u] \models Q(x)$. Logo,
 $M, p \models \exists x P(x)$ e $M, p \models \exists x Q(x)$, ou seja, $M, p \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$.

$$4. \{ \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \} \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Tome-se $M = (\mathbb{N}_0, I)$ tal que $I(P): \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$, $I(Q): \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
 onde $I(P)(n) = 1$ sse n é par
 $I(Q)(n) = 1$ sse n é ímpar

$p: x \Rightarrow \mathbb{N}_0$ qualquer

$M, p \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ pois $M, p \not\models \forall x P(x)$
 pois por exemplo $M, p[x:=1] \not\models P(x)$.
 pois $\models (P) \left(\bigwedge_{x \in \mathbb{N}_0} P(x) \right) = I(P)(1) = 0$

Mas $M, p \not\models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
 pois por exemplo $M, p[x:=2] \not\models P(x) \rightarrow Q(x)$
 pois $M, p[x:=2] \models P(x)$ mas $M, p[x:=2] \not\models Q(x)$
 pois $I(P)(2) = 1$ mas $I(Q)(2) = 0$.

Logo, a afirmação é falsa.

AP 19:

$$1. \models (\exists x (\varphi \wedge \psi)) \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$$

Seja $M = (U, I)$ uma estrutura de interpretação e $p: X \rightarrow U$ uma atribuição. Suponhamos que $M, p \models \exists x (\varphi \wedge \psi)$

Logo, existe $v \in U$ tal que $M, p[x:=v] \models \varphi \wedge \psi$, isto é,
 $M, p[x:=v] \models \varphi$ e $M, p[x:=v] \models \psi$.

Logo $M, p \models \exists x \varphi$ e $M, p \models \exists x \psi$

Logo, $M, p \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$ como queríamos mostrar, logo a afirmação é verdadeira.

$$2. \models (\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi) \models \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

Seja $M = (U, I)$ uma estrutura de interpretação e $p: X \rightarrow U$ uma atribuição. Suponhamos que $M, p \models (\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)$.

Logo, existe $v \in U$ tal que $M, p[x:=v] \models \varphi \wedge \psi$

$$9. \exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \varphi \rightarrow \exists x \psi \text{ se } x \notin VL(\varphi)$$

$$\exists x (\varphi \rightarrow \psi) \equiv \exists x (\neg \varphi \vee \psi) \quad (\text{pois } \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi)$$

$$\equiv \exists x (\varphi \vee \neg \psi) \quad (\text{pois } \neg \varphi \vee \psi \equiv \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\equiv \exists x \varphi \vee \neg \psi \quad (\exists x (\varphi \vee \neg \psi) \equiv \exists x \varphi \vee \neg \psi \text{ se } x \notin VL(\psi))$$

$$\equiv \neg \psi \vee \exists x \varphi \quad (\varphi \vee \neg \psi \equiv \neg \psi \vee \varphi)$$

$$\equiv \varphi \rightarrow \exists x \varphi \quad (\neg \psi \vee \varphi \equiv \varphi \rightarrow \psi)$$

$$\exists. \vdash \exists x \varphi \vee \exists x \psi \vdash \exists x (\varphi \vee \psi)$$

Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, \mathcal{I})$ uma estrutura de interpretação e $\rho: x \rightarrow \mathcal{U}$ atribuição tal que $\mathcal{M}, \rho \models (\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi)$ logo $\mathcal{M}, \rho \models \exists x \varphi$ ou $\mathcal{M}, \rho \models \exists x \psi$ logo

existe $v \in \mathcal{U}$ $\mathcal{M}, \rho[x:=v] \models \varphi$ ou existe $w \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{M}, \rho[x:=w] \models \psi$
 " " $\mathcal{M}, \rho[x:=v] \models \varphi \vee \psi$ ou " " $\mathcal{M}, \rho[x:=w] \models \varphi \vee \psi$

$$\mathcal{M}, \rho \models \exists x (\varphi \vee \psi) \text{ ou } \mathcal{M}, \rho \models \exists x (\varphi \vee \psi)$$

Logo, $\mathcal{M}, \rho \models \exists x (\varphi \vee \psi)$, cqd.

$$6. \forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$$

$$\neg \exists x \neg \varphi \equiv \neg \neg \forall x \varphi \quad (\text{pois } \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi) \\ \equiv \forall x \varphi \quad (\text{pois } \neg \neg \varphi \equiv \varphi)$$

Leis que podemos usar
 $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$
 $\exists (\varphi \vee \psi) \equiv (\exists \varphi) \vee \psi$
 so $x \notin \text{VL}(\psi)$

APLO:

$$1. \vdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

⊗ logo γ nas ocorre livre nas hipóteses não fechadas.

$$c) \gamma \notin \text{VL}(P(x) \vee Q(x))$$

$$d) P(\gamma) \vee Q(\gamma) = (P(x) \vee Q(x)) \uparrow \gamma/x \text{ e } \frac{\forall x P(x) \text{ VE, a)}}{P(\gamma) \text{ VI, d}}$$

$$\gamma \text{ é livre para } x \text{ em } P(x) \vee Q(x) \quad \frac{P(\gamma) \vee Q(\gamma)}{\forall x (P(x) \vee Q(x)) \text{ VI, e}}$$

$$\frac{\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)}{\forall x (P(x) \vee Q(x))}$$

$$a) P(\gamma) = P(x) \uparrow \gamma/x$$

$$a') Q(\gamma) = Q(x) \uparrow \gamma/x$$

b) Todas as folhas estão fechadas

$$\frac{\forall x Q(x) \text{ VE, a')}}{Q(\gamma) \text{ VI, e}}$$

$$\frac{Q(\gamma)}{P(\gamma) \vee Q(\gamma)}$$

VE, 1, 2, 3

$$\frac{P(\gamma) \vee Q(\gamma) \text{ VI } \left[\begin{array}{l} b) \\ c) \end{array} \right]}{\forall x (P(x) \vee Q(x))}$$

$$2. (\rightarrow) \vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

a) $P(y) = P(x) \{y/x\}$ porque x é livre para x em $P(x)$

a') $Q(y) = Q(x) \{y/x\}$ porque " " " " " " $Q(x)$

b) $\gamma \notin VL(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)}{\forall x P(x)} \wedge E, d \quad \frac{\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)}{\forall x Q(x)} \wedge E, e \\
 \frac{\forall x P(x)}{P(y)} \forall E, d \quad \frac{\forall x Q(x)}{Q(y)} \forall E, e \\
 \frac{P(y) \quad Q(y)}{P(y) \wedge Q(y)} \wedge I \\
 \frac{P(y) \wedge Q(y)}{\forall x (P(x) \wedge Q(x))} \forall I [b] \\
 \frac{\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))}{1} \rightarrow E, 1
 \end{array}$$

$$3. \vdash (\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \vdash \frac{P(y) \wedge Q(y)}{P(y)} \wedge E, 1 \\
 \vdash \frac{P(y)}{\exists x P(x)} \exists I [a] \\
 \vdash \frac{Q(y)}{\exists x Q(x)} \exists I [a'] \\
 \vdash \frac{\exists x P(x) \quad \exists x Q(x)}{\exists x (P(x) \wedge Q(x))} \wedge I \\
 \frac{\exists x (P(x) \wedge Q(x))}{\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)} \exists E, 1, 2 \left[\begin{array}{l} b \\ c \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$6. \vdash \exists y \forall x \varphi \vdash \forall x \exists y \varphi$$

$$\begin{array}{c}
 \forall x \varphi \{z/y\} \\
 \forall x (\varphi \{z/y\}) \forall E [a] \\
 \varphi \{z/y\} \{w/x\} \forall E [a] \\
 \exists y (\varphi \{w/x\}) \exists I [a] \\
 \forall x \exists y \varphi \forall I [b] \\
 \forall x \exists y \varphi
 \end{array}$$

AP2:2:

$$3. \quad \varphi = \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(y, x)$$

$$1. P(\varphi) = \text{Scope}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\varphi)))$$

$$\begin{aligned} \text{ImplFree}(\varphi) &= \neg \text{ImplFree}(\exists x \forall y P(x, y)) \vee \text{ImplFree}(\forall x \exists y P(y, x)) \\ &= \neg \exists x \forall y P(x, y) \vee \text{ImplFree}(\forall x \exists y P(y, x)) = \varphi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NNFC}(\varphi_1) &= \text{NNFC}(\neg \exists x \forall y P(x, y)) \vee \text{NNFC}(\forall x \exists y P(y, x)) \\ &= \forall x \text{NNFC}(\neg \forall y P(x, y)) \vee \forall x \exists y P(y, x) \\ &= \forall x \exists y \text{NNFC}(\neg P(x, y)) \vee \forall x \exists y P(y, x) \\ &= \forall x \exists y \neg P(x, y) \vee \forall x \exists y P(y, x) = \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Scope}(\varphi_2) &= \forall x_0 \text{Scope}(\exists y \neg P(x_0, y) \vee \forall x \exists y P(y, x)) \\ &= \forall x_0 \exists y_0 \text{Scope}(\neg P(x_0, y_0) \vee \forall x \exists y P(y, x)) \\ &= \forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \text{Scope}(\neg P(x_0, y_0) \vee \exists y P(y_1, x_1)) \\ &= \forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \text{Scope}(\neg P(x_0, y_0) \vee P(y_1, x_1)) \\ &= \forall x_0 \exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 (\neg P(x_0, y_0) \vee P(y_1, x_1)) = \varphi_3 \end{aligned}$$

2 Forma de Skolem de φ_3 :

Como φ_3 tem 2 quantificadores existenciais, vamos calcular

$$\begin{aligned} \Delta^2(\varphi_3) &= \Delta(\Delta(\varphi_3)) = \\ &= \Delta(\forall x_0 \forall x_1 \exists y_1 (\neg P(x_0, f(x_0)) \vee P(g(x_0, x_1), x_1))) \\ &= \forall x_0 \forall x_1 (\neg P(x_0, f(x_0)) \vee P(g(x_0, x_1), x_1)) \end{aligned}$$

$$1. \quad 1. P(\varphi) = \text{Scope}(\text{NNFC}(\text{ImplFree}(\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))))$$

$$\text{ImplFree}(\varphi) = \exists x (\neg P(x) \vee \forall y P(y)) = \varphi_1$$

$$\text{NNFC}(\varphi_1) = \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \text{Scope}(\varphi_1) &= \exists x_0 \text{Scope}(\neg P(x_0) \vee \forall y P(y)) \\ &= \exists x_0 \forall y_0 \text{Scope}(\neg P(x_0) \vee P(y_0)) \\ &= \exists x_0 \forall y_0 (\neg P(x_0) \vee P(y_0)) = \varphi_2 \end{aligned}$$

↳ Não depende de nenhum quant. universal, logo substituí-se por constante.

2. Só tem 1 quant. existencial.

$$S^1(\varphi_2) = \forall y_0 (\neg P(A) \vee P(y_0))$$

$$\begin{aligned} 5. 1. \text{ImpFree}(\varphi) &= \neg \text{ImpFree}(P \vee (\forall x Q(x) \rightarrow R)) \vee \\ &\quad \text{ImpFree}(S \vee (T \wedge \exists x U(x))) \\ &= \neg (\text{ImpFree}(P) \vee (\neg \text{ImpFree}(\forall x Q(x)) \vee \text{ImpFree}(R))) \\ &\quad \vee (S \vee (T \wedge \exists x U(x))) \\ &= \neg (P \vee (\neg(\forall x Q(x)) \vee R)) \vee (S \vee (T \wedge \exists x U(x))) = \varphi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{NNFC}(\varphi_1) &= \text{NNFC}(\neg(P \vee (\neg \forall x Q(x) \vee R)) \vee \text{NNFC}(S \vee (T \wedge \exists x U(x)))) \\ &= (\text{NNFC}(\neg P) \wedge (\text{NNFC}(\neg(\forall x Q(x) \vee R)))) \vee (S \vee (T \wedge \exists x U(x))) \\ &= (\neg P \wedge (\text{NNFC}(\neg \neg \forall x Q(x)) \wedge \text{NNFC}(\neg R))) \vee (S \vee (T \wedge \exists x U(x))) \\ &= (\neg P \wedge (\forall x Q(x) \wedge \neg R) \vee (S \vee (T \wedge \exists x U(x)))) = \varphi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Scope}(\varphi_2) &= \text{Scope}(\text{Scope}(\neg P \wedge (\forall x Q(x) \wedge \neg R)) \vee \text{Scope}(S \vee (T \wedge \exists x U(x)))) \\ &= \text{Scope}(\text{Scope}(\text{Scope}(\neg P \wedge \text{Scope}(\forall x Q(x) \wedge \neg R))) \vee \text{Scope}(\text{Scope}(S) \vee \text{Scope}(T \wedge \exists x U(x)))) \\ &= \text{Scope}(\text{Scope}(\neg P \wedge \forall x_0 \text{Scope}(Q(x_0) \wedge \neg R)) \vee \text{Scope}(S \vee \exists x_1 \text{Scope}(T \wedge U(x_1)))) \\ &= \text{Scope}(\text{Scope}(\neg P \wedge \forall x_0 (Q(x_0) \wedge \neg R)) \vee \text{Scope}(S \vee \exists x_1 (T \wedge U(x_1)))) \\ &= \text{Scope}(\forall x_2 \text{Scope}(\neg P \wedge (Q(x_2) \wedge \neg R)) \vee \exists x_3 \text{Scope}(S \vee (T \wedge U(x_3)))) \\ &= \forall x_4 \text{Scope}((\neg P \wedge (Q(x_4) \wedge \neg R)) \vee \exists x_3 (S \vee (T \wedge U(x_3)))) \\ &= \forall x_4 \exists x_5 \text{Scope}((\neg P \wedge (Q(x_4) \wedge \neg R)) \vee (S \vee (T \wedge U(x_5)))) \\ &= \forall x_4 \exists x_5 \underbrace{((\neg P \wedge (Q(x_4) \wedge \neg R)) \vee (S \vee (T \wedge U(x_5))))}_{\varphi_3} \end{aligned}$$

φ_3 não está na FNC. Logo, temos de calcular CNFC(φ_3).

$$\forall x_4 \exists x_5 \neg CNFC(\varphi_3) = CNFC(\neg(P \wedge (Q(x_4) \wedge \neg R)) \vee ((S \vee T) \wedge (S \vee U(x_5))))$$

$$\forall x_4 \exists x_5 \neg \left((\neg P \vee S \vee T) \wedge (\neg P \vee S \vee U(x_5)) \wedge (Q(x_4) \vee S \vee T) \wedge (Q(x_4) \vee S \vee U(x_5)) \wedge (\neg R \vee S \vee T) \wedge (\neg R \vee S \vee U(x_5)) \right) = \varphi_4$$

2.

Só temos um quant. existencial, logo vamos calcular:

$$\Delta(\varphi_4) = \forall x_4 \left((\neg P \vee S \vee T) \wedge (\neg P \vee S \vee U(f(x_4))) \wedge (Q(x_4) \vee S \vee T) \wedge (Q(x_4) \vee S \vee U(f(x_4))) \wedge (\neg R \vee S \vee T) \wedge (\neg R \vee S \vee U(f(x_4))) \right)$$

$$4. \forall z (R(x, z) \wedge R(x, y) \rightarrow \exists w (R(y, w) \wedge R(z, w))) = \varphi$$

$$\bullet \text{ImplFree}(\varphi) = \forall z (\text{ImplFree}(R(x, z)) \wedge (\neg \text{ImplFree}(R(x, y)) \vee$$

$$\text{ImplFree}(\exists w (R(y, w) \wedge R(z, w)))) = \forall z (R(x, z) \wedge (\neg R(x, y) \vee$$

$$\exists w (R(y, w) \wedge R(z, w))) = \varphi_1$$

$$\bullet \text{NFC}(\varphi_1) = \varphi_1$$

$$\bullet \text{Scope}(\varphi_1) = \forall z_0 \text{Scope}(R(x, z_0) \wedge (\neg R(x, y) \vee \exists w (R(y, w) \wedge R(z_0, w))))$$

$$= \forall z_0 \text{Scope}(\text{Scope}(R(x, z_0)) \wedge \exists w_0 \text{Scope}(\neg R(x, y) \vee R(y, w_0) \wedge R(z_0, w_0)))$$

$$= \forall z_0 \exists w_0 (R(x, z_0) \wedge (\neg R(x, y) \vee R(y, w_0) \wedge R(z_0, w_0)))$$

Aca bar

AP 24:

1.

$$\textcircled{1} A = \{Q(f(g(w), h(x)), y, f(z, a)), Q(f(y, h(x)), g(w), f(g(w), x)), Q(f(z, h(a)), z, f(y, x))\}$$

$$A_0 = A$$

$$\text{Sub}_0 = \emptyset$$

$$\text{Sub}_1 = \{g(w)/y\}$$

$$A_1 = A_0 \text{Sub}_1 = \{Q(f(g(w), h(x)), g(w), f(z, a)), Q(f(g(w), h(x)), g(w), f(g(w), x)), Q(f(z, h(a)), z, f(g(w), x))\}$$

$$\text{Sub}_2 = \{g(w)/z\}$$

$$A_2 = A_1 \text{Sub}_2 = \{Q(f(g(w), h(x)), g(w), f(g(w), a)), Q(f(g(w), h(x)), g(w), f(g(w), x)), Q(f(g(w), h(a)), g(w), f(g(w), x))\}$$

$$\text{Sub}_3 = \{a/x\}$$

$$A_3 = A_2 \text{Sub}_3 = \{Q(f(g(w), h(a)), g(w), f(g(w), a))\}$$

$\textcircled{2}$

O conjunto A_3 é singular, logo o unificador mais geral é

$$\boxed{\text{Sub}_1 \text{Sub}_2 \text{Sub}_3}.$$

Um unificador que não é o mais geral é obtido compondo o UMG com outra substituição.

$$\boxed{\text{Sub}_1 \text{Sub}_2 \text{Sub}_3} \{a/w\}$$

UMG

$$B = \{R(f(x), g(z)), R(y, g(x)), R(v, w), R(w, g(x))\}$$

①

$$Sub_1 = \{f(x)/y\}$$

$$B_1 = B_0 \cup Sub_1 = \{R(f(x), g(z)), \\ R(f(x), g(x)), \\ R(v, w), \\ R(w, g(x))\}$$

B_1 não é singular

$$Sub_2 = \{x/z\}$$

$$B_2 = B_1 \cup Sub_2 = \{R(f(x), g(x)), \\ R(f(x), g(x)), \\ R(v, w), \\ R(w, g(x))\}$$

B_2 ainda não é singular

$$Sub_3 = \{f(x)/v\}$$

$$B_3 = B_2 \cup Sub_3 = \{R(f(x), g(x)), \\ R(f(x), w), \\ R(w, g(x))\}$$

$$Sub_4 = \{g(x)/w\}$$

$$B_4 = \{R(f(x), g(x)), \\ R(g(x), g(x))\}$$

②

O conjunto não é singular e não ser unificado pois qualquer subs. a x não vai tornar iguais $f(x)$ e $g(x)$.

B não tem UMG, logo pela proposição B não é unificável.

2. Note-se que $\text{FNCP}(\varphi_1)$. Logo vamos calcular $\text{Res}^*(\varphi_1)$

$$C_1 = \{P(x, b), Q(x)\}$$

$$C_2 = \{ \neg P(f(y), b), Q(y) \}$$

$$C_3 = \{ \neg Q(c) \}$$

$$C_4 = \{ \neg Q(f(c)) \}$$

Resolução - N

<u>Dedução</u>	<u>Justificação</u>
$\{ \neg Q(f(c)) \}$	C_4
$\{ P(x, b), Q(x) \}$	C_1
$\{ P(x, b) \} / \{ x \} = \{ P(f(c), b) \}$	Res. C_1 e C_4 (UMG = $\{ f(c)/x \}$)
$\{ \neg P(f(y), b) \} / \{ c/y \} = \{ \neg P(f(c), b) \}$	Res. C_2 e C_3 (UMG = $\{ c/y \}$)
$\perp$	Res. $\{ P(f(c), b) \}$ e $\{ \neg P(f(c), b) \}$

Resolução - L

Res. C_1 e C_2 (UMG $\{ f(y)/x \}$)

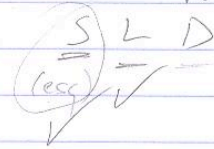
Para usar SLD, a fórmula tem de estar na forma de Horn

$$\varphi = (\neg A \vee C) \wedge (A \vee \neg B) \wedge B \wedge E \wedge (\neg D \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg E)$$

$\begin{matrix} & & & & D & & C \\ & & & & C_5 & & \\ C_1 & & C_2 & & C_3 & & C_4 & & C_5 & & C_6 \end{matrix}$

Res. SLD (selec. esq.)

N ✓



Debwg
 $\{ \neg D, \neg C \}$

Justificação
 C_5

$\{ D, \neg E \}$

C_6

$\{ \neg C, \neg E \}$

Res. C_5 e C_6 ✓

$\{ \neg A, C \}$

C_1

$\{ \neg E, \neg A \}$

Res. $\{ \neg C, \neg E \}$ e C_1 ✓

$\{ E \}$

C_4

$\{ \neg A \}$

Res. $\{ \neg E, \neg A \}$ e C_4 ✓

$\{ A, \neg B \}$

C_2

$\{ \neg B \}$

Res. $\{ \neg A \}$ e C_2 ✓

$\{ B \}$

C_3

$\emptyset$

Res. $\{ \neg B \}$ e C_3 ✓

$$\varphi = \forall x \forall y ($$